Kirchhoff - Gesetze

λ = Wellenlänge
d = Größe der Schaltung
c = Ausbreitungsgeschw. $3\cdot 10^8 m/s$
f = Signalfrequenz

- Konzentriertheitshypothese: $\boxed{d \ll \lambda}$; $\lambda = cT = \frac{c}{f}$
- Knotenregel, KCL: $\sum_{Knoten} i_j(t) = 0$ (heraußfließende Ströme werden positiv gezählt)
- Maschenregel, KVL: $\sum_{Umlauf} u_j(t) = 0$ (Spannungen werden in Umlaufrichtung positiv gezählt)
- Knoteninzidenzmatrix: $A' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1b} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nb} \end{bmatrix}$ n Knoten, b Zweige

  $A' \cdot i = 0$ Spaltensummen von A' sind immer = 0
  $\Rightarrow$ Zeile des Bezugsknotens streichen $\Rightarrow$
  $\boxed{A \cdot \underline{i} = 0}$ (red. Knoteninzidenzmatrix; KCL in Matrixform)

$M = A'^T$ mit $u = M' u_k'$ $\Rightarrow$ KVL in Matrixform: $\boxed{\underline{u} - A^T \underline{u}_k = 0}$

Resistive Eintore

- Implizite Darstellung: $f_F(u,i) = 0$
- Parameterdarstellung: $u = u_F(\lambda)$, $i = i_F(\lambda)$
- Explizite Darstellung: $i = g_F(u)$; $u = r_F(i)$
  Leitwertsdarst. ; Widerstandsdarst.

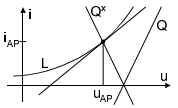
- F ungepolt $\Rightarrow$ Kennlinie punktsymm. zum Ursprung
- F aktiv $\Rightarrow$ mind. 1 Pkt. im II. od. IV. Quadranten
- F verlustfrei $\Rightarrow$ nur auf Koordinatenachsen
- F quellenfrei $\Rightarrow$ enthält den Ursprung
- F streng linear $\Rightarrow$ $(ku, ki) \in F$; $(u_1 + u_2, i_1 + i_2) \in F$

- Umpolung: $\overline{F}$ entsteht durch Punktspiegelung von F am Ursprung: $(\overline{u}, \overline{i}) = (-u, -i) \in \overline{F}$

- Dualität: $(u,i) \in F \Leftrightarrow \left(R_d i, \frac{u}{R_d}\right) \in F^d$

- Parallelschaltung von Widerstandsgeraden: $G = G_1 + G_2 \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \boxed{R = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$
- Serienschaltung von Widerstandsgeraden: genauso wie Parallelschaltung nur G statt R und R statt G

- Arbeitspunkt ermitteln:
  1. Schaltung aufteilen in Quelle Q und Last L
  2. Parameterdarstellung $\Rightarrow$ Kennlinien zeichnen
  3. Lösung: Schnittpunkte der Kennlinien! $\Rightarrow$ ist die Funktion im AP stetig und diffbar, kann man sie dort Linearisieren



Resistive Zweitore

- Beschreibungsformen:
  - Implizit: $f(\underline{u}, \underline{i}) = 0$
  - Parameterisiert: $\begin{bmatrix} \underline{u}(\varsigma) \\ \underline{i}(\varsigma) \end{bmatrix} \in F$
  - Explizit:
    G : Leitwertsmatrix
    R : Widerstandsmatrix
    H : Hybridmatrix
    H' : „inverse" Hybridmatrix
    A : Kettenmatrix
    A' : „inverse" Kettenmatrix

$$\begin{matrix} u_1 \\ i_1 \end{matrix}\Big] = \boldsymbol{A} \cdot \begin{matrix} u_2 \\ -i_2 \end{matrix}\Big] = \begin{matrix} a_{11}u_2 - a_{12}i_2 \\ a_{21}u_2 - a_{22}i_2 \end{matrix}\Big] \qquad \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix}\Big] = \boldsymbol{G} \cdot \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\Big] = \begin{matrix} g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \\ g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{matrix}\Big]$$

$$\begin{matrix} u_2 \\ i_2 \end{matrix}\Big] = \boldsymbol{A'} \cdot \begin{matrix} u_1 \\ -i_1 \end{matrix}\Big] = \begin{matrix} a'_{11}u_1 - a'_{12}i_1 \\ a'_{21}u_1 - a'_{22}i_1 \end{matrix}\Big] \qquad \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\Big] = \boldsymbol{R} \cdot \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \end{matrix}\Big] = \begin{matrix} r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{matrix}\Big]$$

$$\begin{matrix} u_1 \\ i_2 \end{matrix}\Big] = \boldsymbol{H} \cdot \begin{matrix} i_1 \\ u_2 \end{matrix}\Big] = \begin{matrix} h_{11}i_1 + h_{12}u_2 \\ h_{21}i_1 + h_{22}u_2 \end{matrix}\Big]$$

$$\begin{matrix} i_1 \\ u_2 \end{matrix}\Big] = \boldsymbol{H'} \cdot \begin{matrix} u_1 \\ i_2 \end{matrix}\Big] = \begin{matrix} h'_{11}u_1 + h'_{12}i_2 \\ h'_{21}u_1 + h'_{22}i_2 \end{matrix}\Big]$$

- Aufstellen der Matrix z.B. G: $g_{11} = \frac{i_1}{u_1}\Big|_{u_2=0}$ $g_{12} = \frac{i_1}{u_2}\Big|_{u_1=0}$ $g_{21} = \frac{i_2}{u_1}\Big|_{u_2=0}$ $g_{22} = \frac{i_2}{u_2}\Big|_{u_1=0}$

  R: $r_{11} = \frac{u_1}{i_1}\Big|_{i_2=0}$ $r_{12} = \frac{u_1}{i_2}\Big|_{i_1=0}$ $r_{21} = \frac{u_2}{i_1}\Big|_{i_2=0}$ $r_{22} = \frac{u_2}{i_2}\Big|_{i_1=0}$

$$\boxed{\begin{matrix} I = G \cdot U \\ U = R \cdot I \end{matrix}}$$

- Linearisierung (inmplizit): $\Delta f(\Delta u, \Delta i) = M \Delta u + N \Delta i = 0$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \qquad N := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_1} & \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_1} & \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \end{bmatrix}$$

- streng linear (= linear und quellenfrei): eine beliebige Linearkomb. zweier Betriebspunkte ist wieder ein BP

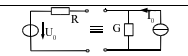
$$\begin{bmatrix} \underline{u}^{(1)} \\ \underline{i}^{(1)} \end{bmatrix} \in F \wedge \begin{bmatrix} \underline{u}^{(2)} \\ \underline{i}^{(2)} \end{bmatrix} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}^{(1)} \\ \underline{i}^{(1)} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}^{(2)} \\ \underline{i}^{(2)} \end{bmatrix} \in F ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

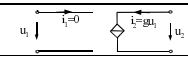
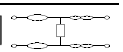
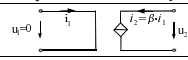
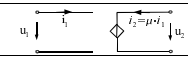
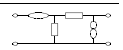
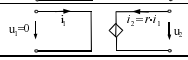
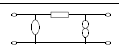
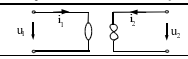
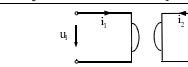
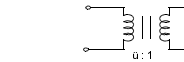
$$\boxed{f(\underline{u}, \underline{i}) = M\underline{u} + N\underline{i} = 0}$$

- Linearisierung (explizit): $\underline{i} = \underline{G}(\underline{u}) = I + \frac{\partial g(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} = I + G\underline{u}$ mit $G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{AP}$ $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$

  G ist Jacobimatrix

  Taylor: $f_{lin}(x) = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\Big|_{x_0} \cdot (x - x_0)$

Nullator	$u=0$ $i=0$		- streng linear; verlustlos - dual zu sich selbst
Norator	$u=$ beliebig; $i=$ beliebig		- streng linear; aktiv - dual zu sich selbst
Leerlauf	$u=$ beliebig; $i=0$		- streng linear $e=0$ - dual zum Kurzschluss $m=0$
Kurzschuß	$u=0$ $i=$ beliebig		- streng linear $e=0$ - dual zum Leerlauf $n=0$
ohmscher Widerstand	$u=R\cdot i$ $i=G\cdot u$		- streng linear - passiv $R^d=\frac{R_d^2}{R}$ $G^d=\frac{1}{R_d^2 G}$ $e=0$
ideale Stromquelle	$u=$ beliebig; $i=i_0$		- spannungsgesteuert; aktiv; gepolt $m=0$ - linear, dual zur Spannungsquelle $-i_0=e/n$
ideale Spannungsquelle	$u=u_0$ $i=$ beliebig		- stromgesteuert; aktiv; gepolt $n=0$ - linear; dual zur Stromquelle $-u_0=e/m$
reale Diode	$u_D=U_T\ln(i_D/I_S+1)$ $i_D=I_S[\exp(u_D/U_T)-1]$		- gepolt; passiv $U_T=25mV$ - quellenfrei $I_S\approx pA$
Photodiode	$i(0)=I_S\cdot[\exp(u(t)/U_T)-1]-i_L(t)$		- gepolt; aktiv
Zenerdiode	$u<U_Z \Rightarrow i$ sehr groß Zehnerdurchbruch		- gepolt; passiv - quellenfrei
Tunneldiode			- gepolt; passiv; quellenfrei - inkremental aktiv !
ideale Diode	$u=0$ für $i>0$ $i=0$ für $u<0$		- verlustlos; stückweise linear - dual: umgepolte ideale Diode
Konkaver (G,U) Widerstand	$i=0$ für $u\le U_0$ $i=G(u-U_0)$ für $u\ge U_0$		- stückweie linear - für $U_0>0$, $G>0$: passiv, spannungsgesteuert - dual: konvexer Widerstand
Konvexer (R,I) Widerstand	$u=0$ für $i\le I_0$ $u=R(i-I_0)$ für $i\ge I_0$		- stückweise linear; für $I_0>0$, $R>0$ stromgest. - dual: konkaver Widerstand
Lineare Quellen			- linear; aktiv - $U_0=I_0R$, $I_0=U_0G$

Spannungs gest. Stromquelle **USI** VCCS		$A=\begin{bmatrix}0 & -1/g\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	$G=\begin{bmatrix}0 & 0\\ g & 0\end{bmatrix}$	$M=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -g & 0\end{bmatrix}$ $N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 
Strom gest. Stromquelle **ISI** CCCS		$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1/\beta\end{bmatrix}$	$H=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta & 0\end{bmatrix}$	
Spannungs gest. Spannungsq. **USU** VCVS		$A=\begin{bmatrix}1/\mu & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	$H'=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \mu & 0\end{bmatrix}$	
Strom gest. Spannungsquelle **ISU** CCVS		$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1/r & 0\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}0 & 0\\ r & 0\end{bmatrix}$	$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -r & 0\end{bmatrix}$ 
Nullor quellenfrei, streng linear		$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$	$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	$N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
Gyrator, Dualwandler idealer G.: $R_1=R_2=R_d$ verlustlos; $G=-G^T$; $R=-R^T$ **P**ositiv **I**mmittanz **I**nverter $F_{Gyr}=F^d$	 $R_1 : R_2$ $det\,A = det\,A' = -1$	$A=\begin{bmatrix}0 & R_1\\ 1/R_2 & 0\end{bmatrix}$ $G=\begin{bmatrix}0 & 1/R_2\\ -1/R_1 & 0\end{bmatrix}$	$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $R=\begin{bmatrix}0 & -R_1\\ R_2 & 0\end{bmatrix}$	$N=\begin{bmatrix}0 & R_1\\ -R_2 & 0\end{bmatrix}$ $A'=\begin{bmatrix}0 & -R_2\\ -1/R_1 & 0\end{bmatrix}$
Idealer Übertrager verlustlos, reziprok, umkehrbar für $\ddot{u}=\pm 1$ **P**ositiv **I**mmittanz **K**onverter	 $\ddot{u} : 1$ $det\,A = det\,A' = +1$	$A=\begin{bmatrix}\ddot{u} & 0\\ 0 & 1/\ddot{u}\end{bmatrix}$ $H=\begin{bmatrix}0 & \ddot{u}\\ -\ddot{u} & 0\end{bmatrix}$	$M=\begin{bmatrix}1 & -\ddot{u}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $H'=\begin{bmatrix}0 & -1/\ddot{u}\\ 1/\ddot{u} & 0\end{bmatrix}$	$N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \ddot{u} & 1\end{bmatrix}$ $A'=\begin{bmatrix}1/\ddot{u} & 0\\ 0 & \ddot{u}\end{bmatrix}$
NIK Negativ Immittanz Konverter aktiv, antireziprok, für $\lvert k\rvert=1$ symmetrisch	k = 1 : F ist an der i_1 -Achse gespiegelter Zweipol k = -1 : F ist an der u_1 - Achse gespiegelter Zweipol	$A=\begin{bmatrix}-k & 0\\ 0 & 1/k\end{bmatrix}$ $H=\begin{bmatrix}0 & -k\\ -k & 0\end{bmatrix}$	$M=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1/k\end{bmatrix}$ $H'=\begin{bmatrix}0 & -1/k\\ -1/k & 0\end{bmatrix}$	$N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1/k\end{bmatrix}$ $k\in\mathbb{R}$ $A'=\begin{bmatrix}-1/k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$

Klassifizierung der Zweitore anhand der Kettenmatrix A

1. alle vier Einträge gleich Null ⇒ Nullor
2. drei Einträge gleich Null ⇒ gesteuerte Quelle
3. zwei Einträge gleich Null ⇒ INVERTER / KONVERTER

	INVERTER (z.B. Gyrator)	KONVERTER (z.B. NIK; id. Übertr.)
positiv	$\begin{bmatrix} 0 & R \\ 1/R & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/\ddot{u} & 0 \\ 0 & \ddot{u} \end{bmatrix}$
negativ	$\begin{bmatrix} 0 & R \\ -1/R & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$
	Strom ⇔ Spannung	Strom ⇔ Strom; Spannung ⇔ Spannung

Leistung: $p = u^T i$

Verlustlosigkeit: $\forall \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \in F:\ u^T i = 0$ bzw. $U^T I + I^T U = 0$

Passivität: $\forall \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \in F:\ u^T i \geq 0$

Aktivität: $\exists \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} \in F:\ u^T i < 0$

Reziprozität: $U^T I - I^T U = 0;\ G = G^T;\ R = R^T;\ \det A = 1;\ \det A' = 1$

Netzwerk besteht nur aus R, C, L ⇒ reziprok

Dualität: $\underline{f}^d\left(\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix}\right) = \underline{f}\left(\begin{bmatrix} 0 & R_d E \\ \frac{1}{R_d} \cdot E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix}\right)$; $G^d = \frac{1}{R_d^2} \cdot R$; $R^d = R_d^2 \cdot G$

Symmetrie: $\underline{f}^u\left(\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix}\right) = \underline{f}(P \cdot \underline{u}, P \cdot \underline{i})$ mit $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}$ $\quad G = PGP,\ R = PRP,\ A = A'$

z.B.: $g_{11} = g_{22}$ und $g_{12} = g_{21}$

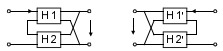
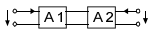
Die Umrechnungstabelle der Zweitor-Matrizen:

	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H'}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A'}$
$\boldsymbol{R}$	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{G}} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h'_{12} \\ h'_{21} & \det \boldsymbol{H'} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & \det \boldsymbol{A} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{21}} \begin{bmatrix} a'_{22} & 1 \\ \det \boldsymbol{A'} & a'_{11} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{G}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{R}} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{H'} & h'_{12} \\ -h'_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -\det \boldsymbol{A} \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{12}} \begin{bmatrix} a'_{11} & -1 \\ -\det \boldsymbol{A'} & a'_{22} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}$	$\frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{R} & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \det \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{H'}} \begin{bmatrix} h'_{22} & -h'_{12} \\ -h'_{21} & h'_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} & \det \boldsymbol{A} \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{11}} \begin{bmatrix} a'_{12} & 1 \\ -\det \boldsymbol{A'} & a'_{21} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H'}$	$\frac{1}{r_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ r_{21} & \det \boldsymbol{R} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{G} & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{H}} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} a_{21} & -\det \boldsymbol{A} \\ 1 & a_{12} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{22}} \begin{bmatrix} a'_{21} & -1 \\ \det \boldsymbol{A'} & a'_{12} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{A}$	$\frac{1}{r_{21}} \begin{bmatrix} r_{11} & \det \boldsymbol{R} \\ 1 & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{21}} \begin{bmatrix} -g_{22} & -1 \\ -\det \boldsymbol{G} & -g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} -\det \boldsymbol{H} & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{21}} \begin{bmatrix} 1 & h'_{22} \\ h'_{11} & \det \boldsymbol{H'} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{A'}} \begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{11} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{A'}$	$\frac{1}{r_{12}} \begin{bmatrix} r_{22} & \det \boldsymbol{R} \\ 1 & r_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}} \begin{bmatrix} -g_{11} & -1 \\ -\det \boldsymbol{G} & -g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}} \begin{bmatrix} 1 & h_{11} \\ h_{22} & \det \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{12}} \begin{bmatrix} -\det \boldsymbol{H'} & -h'_{22} \\ -h'_{11} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$

Beschreibungsformen:

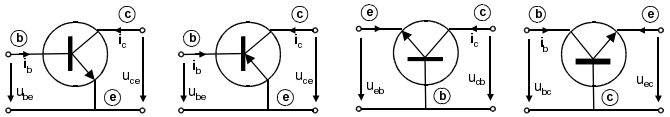
	implizite Darstellung	Parameterdarstellung	explizite Darstellung
streng linear	$F = Kern[MN] = \left\{ \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \middle\vert\ [MN] \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = 0 \right\}$ $Rang[MN] = p$	$F = Bild \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \middle\vert\ \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \cdot \underline{c}, \underline{c} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ $Rang \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = p$ Betriebsmatrix: $\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}^{(1)} & \underline{u}^{(2)} \\ \underline{i}^{(1)} & \underline{i}^{(2)} \end{bmatrix}$	$\underline{i} = G\underline{u}$ $\underline{u} = R\underline{i}$
nicht quellenfrei	$F = Kern[MN] + \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{i}_0 \end{bmatrix}$	$F = Bild \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{i}_0 \end{bmatrix}$	$\underline{i} = G\underline{u} + \underline{i}_g$ $\underline{u} = R\underline{i} + \underline{u}_r$ usw.

Zusammenschaltung von Zweitoren:

Parallelschaltung		$\underline{g}_{ges} = \underline{g}_1 + \underline{g}_2$ $\quad G_{ges} = G_1 + G_2$ $\quad R = R_1(R_1 + R_2)$
Serienschaltung		$\underline{r}_{ges} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2$ $\quad R_{ges} = R_1 + R_2$ $\quad G = G_1(G_1 + G_2)$
Hybride Verschaltung		$\underline{h}_{ges} = \underline{h}_1 + \underline{h}_2$ $\quad \underline{h'}_{ges} = \underline{h'}_1 + \underline{h'}_2$ $H_{ges} = H_1 + H_2$ $\quad H'_{ges} = H'_1 + H'_2$
Kettenschatung		$\underline{a}_{ges} = \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2$ $\quad A_{ges} = A_1 \cdot A_2$ $\quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underline{a}_{ges} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \underline{a}_1 \left(\underline{a}_2 \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \right)$

Transistoren

Grundschaltungen:



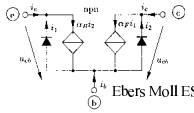
npn in Emitterschaltung | pnp in Emitterschaltung | npn in Basisschaltung | npn in Kollektorschaltung

In Emitterschaltung gilt:

$$i_b = I_S\left(\exp\left(\frac{u_{be}}{U_T}\right) - 1\right)$$
$$i_c = \beta i_b$$
$$u_{be} = U_T \ln\left(1 + \frac{i_b}{I_s}\right)$$

- Der Strom zur jeweiligen Bezugsklemme kommt nicht vor! (z.B. i_e)
- Diodenrichtung: p ⊕ ▶ ⊖ n
- Transistoren sind immer passiv!

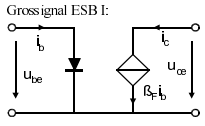
Ersatzschaltungen:



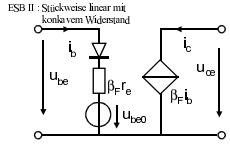
Ebers Moll ESB

$u_{cb} > 0$ npn Transistor in Emitterschaltung, Vorwärtsbetrieb!
(pnp: Diode umdrehen! Kleinsignal ESB sind für pnp und npn identisch!)

Grossignal ESB I:



ESB II : Stückweise linear mit konkavem Widerstand

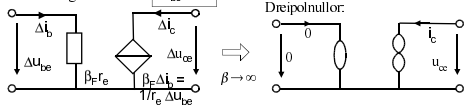


Hybridmatrix H der Emitterschaltung:

r_e : Eingangswiderstand
β : Stromverstärkung
μ : Spannungsrückwirkung
g : Ausgangsleitwert

$$\begin{bmatrix} \Delta u_{be} \\ \Delta i_c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} r_e = \frac{\Delta u_{be}}{\Delta i_b} & \mu = \frac{\Delta u_{be}}{\Delta u_{ce}} \\ \beta = \frac{\Delta i_c}{\Delta i_b} & g = \frac{\Delta i_c}{\Delta u_{ce}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_b \\ \Delta u_{ce} \end{bmatrix}$$

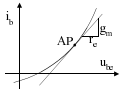
lin. Kleinsignal ESB: $u_{be} > 0$



Kenngrößen des Transistors:

- Stromverstärkung: $\beta = \frac{i_c}{i_b}$
- Verlustleistung: $P_v = U_{be} I_b + U_{ce} I_c \approx I_c U_{ce}$
- Eingangswiderstand $r_e = \frac{1}{g_m}$ (Transferwiderstand): $\frac{\partial i_b}{\partial u_{be}} = \frac{g_m}{\beta_F} \Rightarrow r_e = \frac{\Delta u_{be}}{\Delta i_b} = \frac{U_T}{-i_e}$
- Kleinsignalverstärkung (Spannungsverstärkung): $v_u = \frac{\Delta u_{out}}{\Delta u_{in}}$
- Leistungsverstärkung: $v_p = v_u \cdot v_i = \beta_F = \frac{\Delta u_{out} \cdot \Delta i_c}{\Delta u_{in} \cdot \Delta i_b}$
- Kleinsignalleitwert / Steilheit: $g_m = \frac{\partial i_c}{\partial u_{be}}$

Eingangskennlinie:



Arbeitspunktbestimmung:

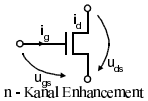
- Kirchhoffgleichungen aufstellen (meist $u = u'$, $i = -i'$) (u', i') sind Quellenkenngrößen
- (u', i') elemeniren, durch (u, i) ersetzen
- in Koodinatensystem eintragen, Schnittpunkt der Kennlinien ist Arbeitspunkt.

$$\left.\begin{array}{ll} U_{be} = U_0 + R_i i_e: & \text{Quellenkennlinie } Q \\ U_{be} = U_0 - R_i i_e: & \text{externe Quellenkennlinie } Q^x \end{array}\right\} \Rightarrow U_{BE} \overset{(LL)}{=} 0 \Rightarrow U_0 \overset{(KS)}{=} R_i i_0 \ (bei\, Q^x) \Rightarrow i_0 = \frac{R_i}{u_0}$$

⇒ Punkte $(U_0, 0)$ und $(0, i_0)$ einzeichnen und als Gerade verbinden(Q^x)

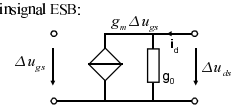
- Schnittpunkt Q^x mit Transistorkennlinie ist **AP**
- im Eingangskennlinienfeld haben bereits kleine Änderungen der Steigung von Q^x eine große Verschiebung des AP zur Folge!

Unipolartransistoren: FET



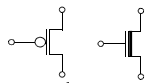
n - Kanal Enhancement

Kleinsignal ESB:



Innenleitwert: $g_0 = \frac{\partial i_d}{\partial u_{ds}}$

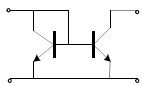
Steilheit: $g_m = \frac{\partial i_d}{\partial u_{gs}}$



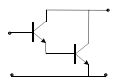
p - Kanal Enhancement | n - Kanal Depletion

Stromspiegel:

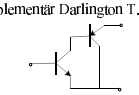
ideal: $u_1 = 0$
$i_1 = i_2$



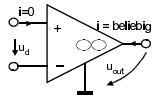
Darlington Transistor:



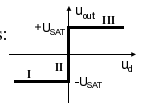
Komplementär Darlington T.:



Operationsverstärker

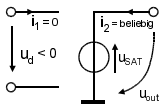


Kennlinie des idealen OpAmps:

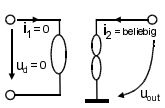


- In den Sättigungsbereichen kennt man u_{out} immer: $u_{out}=\pm U_{Sat}$
- Wird der OpAmp im streng linearen Bereich betrieben, sofort ESB II verwenden!!

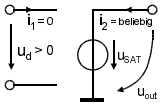
ESB I: $u_d<0;\ u_{out}=-U_{Sat}$



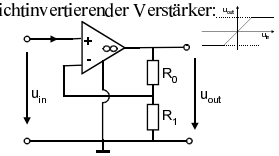
ESB II: $u_d=0;\ |u_{out}|\le|U_{Sat}|$



ESB III: $u_d>0;\ u_{out}=U_{Sat}$



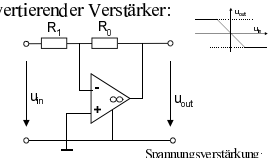
Nichtinvertierender Verstärker:



$$u_{out}=\left(1+\frac{R_0}{R_1}\right)u_{in}$$

Spannungsverstärkung: $v_u=1+\frac{R_0}{R_1}$

Invertierender Verstärker:



$$u_{out}=\frac{-R_0}{R_1}u_{in}$$

Spannungsverstärkung: $v_u=\frac{R_0}{R_1}$

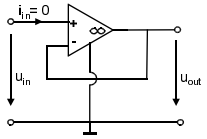
Addierer:

Mehrfacheinkopplung: $u_{out}=-R_0\sum_i\frac{u_i}{R_i}$

Spannungsfolger:

= Nicht invertierender Verstärker mit $v_u=1$

= Impedanzwandler



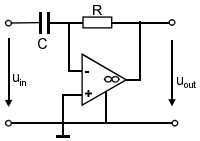
$u_{out}=u_{in}$

$v_u=1$

Eingang: nicht belastet $i_{in}=0$

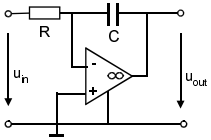
Ausgang: hohe Ströme

Differenzierer:



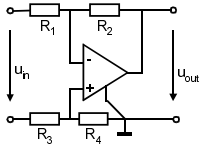
$$u_{out}=-RC\cdot\dot{u}_{in}$$

Integrierer:



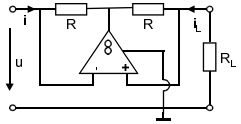
$$u_{out}=-u_c(t_0)-\frac{1}{RC}\int u_{in}\,dt$$

Potentialdifferenzverstärker:

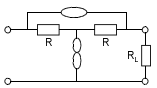


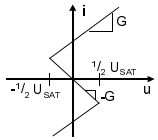
$$u_{out}=\frac{-R_2}{R_1}u_{in}=\frac{-R_4}{R_3}u_{in}\quad\text{Bed. }\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$$

Negativimmittanzkonverter (NIK):

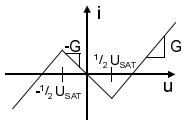


Nullormodell:





Umpolung des OpAmp:



Logarithmierer:

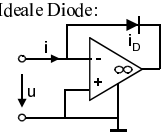
$$u_{out}=-U_T\ln\frac{u_{in}}{R\cdot I_S}$$

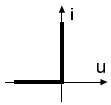
Summierer:

$$u_{out}=-\sum_{i=1}^{n}k_iu_i+\sum_{i=1}^{m}k_i'u_i'$$

$$k_i=\frac{G_i}{G_0}\qquad k_i'=\frac{G_i'}{G_0}\cdot\frac{G}{G'}$$

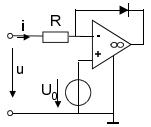
Ideale Diode:



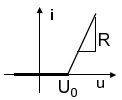


Umgepolte ideale Diode: pn - Diode umpolen

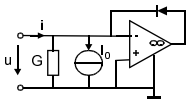
Konkaver Widerstand:



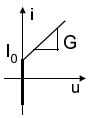
$U_0<U_{Sat}$



Konvexer Widerstand:



$I_0<G\cdot U_{Sat}$



Gyrator:

Parallelschaltung zweier USI oder Serienschaltung zweier ISU oder:
Kettenschaltung eines NIK $(k=-1)$ mit einem NII

USU mit $\mu>1$ = Nichtinvertierender Verstärker

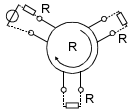
$\mu<0$ Invertierendem Verstärker und Spannungsfolger in Kette

ISU mit $r<0$ = Invertiernder Verstärker ohne R_1

$r>0$ zusätzlich invertierenden Verstärker mit $v_u=-1$ nachschalten

Resistive Mehrtore

- Zirkulator
  - verlustlos
  - nicht reziprok



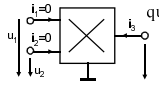
$$M=E\qquad N=\begin{bmatrix}0&-R&R\\R&0&-R\\-R&R&0\end{bmatrix}$$

Widerstandsmatrix:

$$R=-R=-M^{-1}N=-N$$

- Multiplizierer

$$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{bmatrix}=h\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\i_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{u_1u_2}{u_M}\end{pmatrix}$$



quellenfrei, aktiv

$$u_3=\frac{u_1\cdot u_2}{u_M}$$

- Dividierer:

$$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\u_3\end{bmatrix}=h\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\i_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{u_1u_D}{u_2}\end{pmatrix}$$

- Mehrtorübertrager

$$u_1:u_2:u_3\ldots u_p=1:\frac{1}{\ddot{u}_2}:\frac{1}{\ddot{u}_3}:\ldots:\frac{1}{\ddot{u}_p}\qquad i_1+\frac{1}{\ddot{u}_2}i_2+\frac{1}{\ddot{u}_3}i_3+\ldots+\frac{1}{\ddot{u}_p}i_p=0$$

Analyseverfahren

- Verbindungsmehrtor

$$Rang\begin{bmatrix}B'&0\\0&A'\end{bmatrix}=Rang[MN]=b$$

Jede Knotenpunktsgleichung steht auf jeder Schleifengleichung senkrecht: $A'B'^T=0$

A Knoteninzidenzmatrix
B Schleifeninzidenzmatrix

Eigenschaften des Verbindungsmehrtors:
n Knoten (Nodes)
b Anzahl der Kanten (Zweige, Branches) = Anz. der Tore p
Zeitinvariant, streng linear, verlustlos, reziprok

$\Leftrightarrow$ $\boxed{U^TI=0}$ Tellegenscher Satz

Jeder Torspannungsvektor des VMT steht auf jedem Torstromvektor de VMT senkrecht

- Baumkonzept (= Schleifenanalyse, oder Schnittmengenanalyse)
  - Netzwerkgraph zeichnen: Baum muß folgende drei Eigenschaften erfüllen:
    Baum ist ein zusammenhängender Graph - Er enthält alle Knoten - und hat keine Schleifen
    Erst Baumzweige, dann Verbindungskanten fortlaufend nummerieren.
    Es gibt $det(AA^T)$ verschiedenen Bäume im Netzwerkgraphen.
    Anzahl der Baumzweige: $(n-1)$
    Anzahl der Verbindungskanten: $s=b-(n-1)$ = Anzahl der linear unabh. Schleifengleichungen
    b Gleichungen
  - Aufstellen der linear unabh. Maschengleichungen:
    Eine Schleife enthält nur eine Verbindungskante, sonst nur Baumzweige
    $\Rightarrow\quad B\cdot u=\begin{bmatrix}B_b&E_S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_b\\u_v\end{bmatrix}=0$
  - Aufstellen der linear unabh. Knotengleichungen:
    Superknoten enthält nur eine Baumkante, sonst nur Verbindungskanten
    $\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}E_{n-1}&-B_b^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_b\\i_v\end{bmatrix}=0$

vollständige Beschr. des Verbindungsmehrtors:

$$\begin{bmatrix}B_b&E_S&0&0\\0&0&E_{n-1}&-B_b^T\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_b\\u_v\\i_b\\i_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

- Knotenspannungsanalyse

$$\begin{bmatrix}-A^T&E_b&0\\0&0&A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_k\\u\\i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$b+(n-1)$ Gleichungen

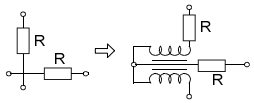
- $(n-1)$ zusätzliche Kanten zwischen Bezugsnoten und übrigen $(n-1)$ Knoten
- diese sind unbeschaltet und dienen ausschließlich als Meßtore.
- Das Aufstellen des Baumes entfällt
- A kann durch Augenschein aufgestellt werden (A = Knoteninzidenzmatrix)
- gut bei stark vermaschten Netzwertken $(b\gg n)$

- Maschenstromanalyse

$$\begin{bmatrix}B&0&0\\0&E_b&-B^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\i\\i_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$(b+s)$ Gleichungen

- nur bei planaren Netzwerken!
- durch ideale Übertrager $(\ddot{u}=1)$ kann ein nichtplanarer Graph in einen planaren Graph überführt werden, dabei steigt die Anzahl der Kanten um zwei pro idealem Übertrager
- gut bei schwach vermaschten Netzwerken $(b\approx n)$



- Tableaugleichungen

$$\begin{array}{l} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{array} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{e} \end{bmatrix} \begin{array}{l} s \\ (n-1) \\ b \\ \hline 2b \end{array}$$

Gleichungen: $2b$

lin. Netzwerkelemente $\Rightarrow$ $M u + N i = e$

$\underline{e}$: Erregungsvektor aller unabhängiger Quellen

eindeutige Lösung des Tableaugleichungssystems wenn $\det T(t_0) \neq 0$

- Knotentableausystem:

$$\begin{array}{l} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{array} \begin{bmatrix} -A^T & E_b & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u_k} \\ \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{e} \end{bmatrix} \begin{array}{l} b \\ (n-1) \\ b \\ \hline 2b+(n-1) \end{array}$$

Gleichungen: $2b+(n-1)$

- Maschentableausystem:

$$\begin{array}{l} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{array} \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & E_b & -B^T \\ M & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \\ \underline{i_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{e} \end{bmatrix} \begin{array}{l} s \\ b \\ b \\ \hline 2b+s \end{array}$$

Gleichungen: $2b+s$

- Nichtlineares Tableaugleichungssystem: $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \underline{0}$ $\quad h(u, i, t) = 0$ $\quad$ je p Gleichungen in 2p Variabelen

- Reduzierte Knotenspannungsanalyse / Maschenstromanalyse

Umformen des Knotentableausystems:

- red. Knotenleitwertsmatrix Y_k

$\boxed{Y_k = A Y A^T} = A(-N^{-1} M) A^T$

- Knoten-Stromquellenvektor $\underline{i_q}$:

$\boxed{\underline{i_q} = -A \underline{i_0}}$ $\quad \boxed{Y_k \underline{u_k} = \underline{i_q}}$

Y = Kantenleitwertsmatrix

$Y_k = (n-1)$ Gleichungen

Umformen des Maschentableausystems:

- Maschenwiderstandsmatrix Z_m

$\boxed{Z_m = B(-M^{-1} N) B^T}$

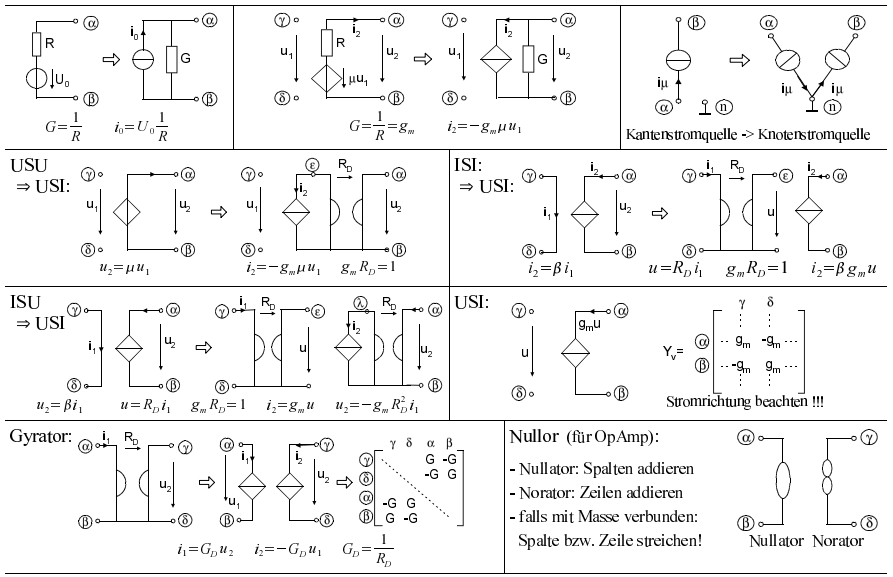
- Maschen-Stromquellenvektor $\underline{u_q}$

$\underline{u_q} = -B \underline{u_0} = -B M^{-1} e$ $\quad \boxed{Z_m \underline{i_m} = \underline{u_q}}$

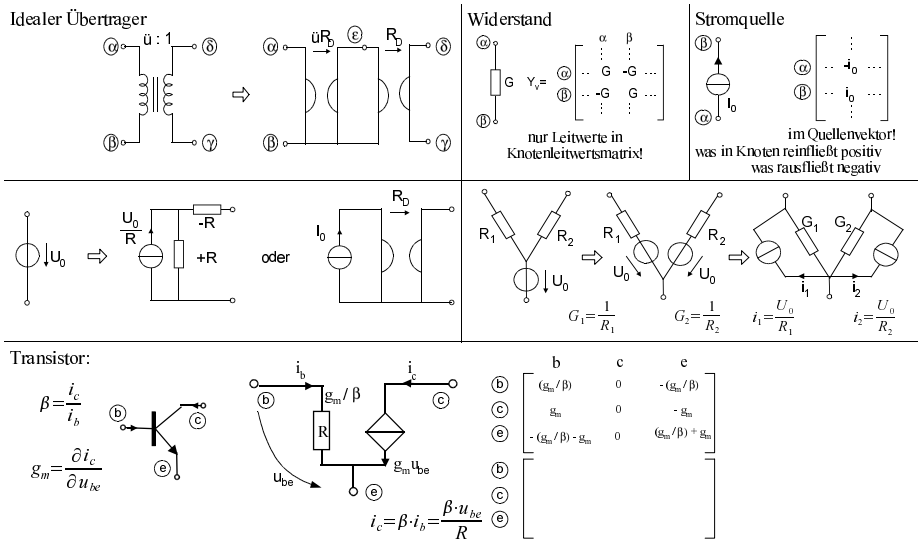
$Z_m = s$ Gleichungen

- Direktes Aufstellen der red. Knotenleitwertsmatrix (komplexe KSA)

1. Nichtspannungsgesteuerte Elemente erstzen!
2. Schrittweise Knotenleitwertsmatrix Y aufstrellen: $\boxed{Y_k \underline{u_k} = \underline{i_q}}$
   - Bezugsknoten weglassen!
   - komplex $j\omega C$ und $1/j\omega L$ Im Prinzip wie G und R
3. Gesteuerte Quellen: Steuerleitwerte eintragen.
4. Gyrator einbauen (entsprechende Zeile / Spalte streichen!)
6. Knotenstromquellenvektor $\underline{i_q}$ aufstellen



Bitte wenden!

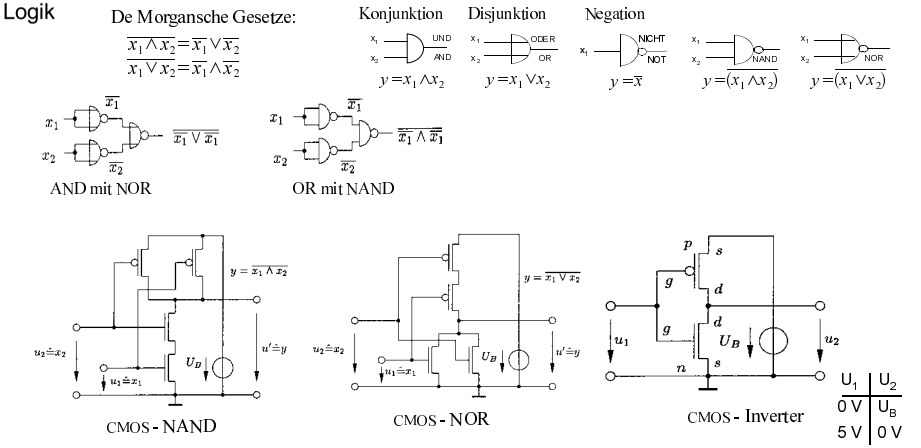


Logik

De Morgansche Gesetze:

$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

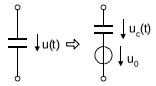
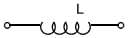
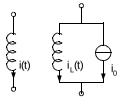
$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$



CMOS AND / OR : p- und n- Kanal Transistoren vertauschen!

Reaktive Netzwerkelemente

Beschreibungsformen:

	allgemein	impl. / expl.	linear	komplex	mit Anfangsbedingung
Kapazität $[C]=\frac{C}{V}=\frac{As}{V}=F$ $[Q]=C=As$	$q(t)=q_0+\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau$ $i(t)=\frac{d\,q(t)}{dt}$	$f_c(u,q)=0$ $q=c(u)$ $u=c^{-1}(q)$	$q(t)=C\,u(t)$ $i(t)=C\,\dot{u}(t)$	$I=Y\,U$ $Y=j\,\omega C$ $Z=\frac{1}{j\,\omega C}$	 $u(t)=u_c(t)+u_0$
 Induktivität $[L]=\frac{Wb}{A}=\frac{Vs}{A}=H$ $[\Phi]=Wb=Vs$	$\phi(t)=\phi_0+\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau$ $u(t)=\frac{d\,\phi(t)}{dt}$	$f_l(i,\phi)=0$ $\phi=l(i)$ $i=l^{-1}(\phi)$	$\phi(t)=L\,i(t)$ $u(t)=L\,\dot{i}(t)$	$U=Z\,I$ $Z=j\,\omega L$ $Y=\frac{1}{j\,\omega L}$	 $i(t)=i_L(t)+i_0$

- Ein reaktives Eintor heißt streng linear, wenn seine Kennlinie ein Unterraum der $u-q$ oder $i-\phi$ Ebene ist.
- Kapazität des Plattenkondensators: $C=\epsilon_0\frac{A}{d}$

Memristor: $u_M(t)=\dot{\Phi}(t)$ $\quad i_M(t)=\dot{q}(t)$

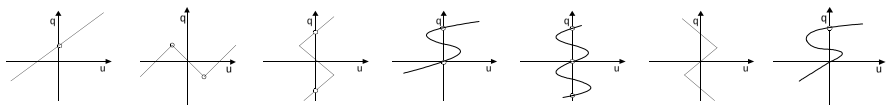
Energiebetrachtungen:

- ideale Reaktanzen sind verlustlos; Außer ihre Kennlinie ermöglicht zwei verschiedene Wege um von einem Punkt. P_1 zu P_2 zu gelangen. (Hysterese - Kennlinie)
- im stationären Fall ist der Leistungsfluß Null. $u(t)=const \quad i(t)=const \Rightarrow \quad i=dq/dt=0 \Rightarrow \quad p=u\cdot i=0$
- Energieänderung: $\boxed{W_C(t_1,t_2)=W_C(q_1,q_2)=\int_{q_1}^{q_2} u(q)\,dq=\frac{1}{2C}\left(q_2^2-q_1^2\right)=\frac{C}{2}\left(u_2^2-u_2^2\right)}$

  $\boxed{W_L(t_1,t_2)=W_L(\Phi_1,\Phi_2)=\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} i(\Phi)\,d\Phi=}$

  Flächen abschnittsweise berechnen!
- gespeicherte Energie: $\boxed{E_C(q_1)=E_C(u_1)=\frac{1}{2C}q_1^2=\frac{1}{2}C\,u_1^2}$ $\boxed{E_L(\phi_1)=E_L(i_1)=\frac{1}{2L}\phi_1^2=\frac{1}{2}L\,i_1^2}$
- Relaxpunkte: (Ruhepunkte) energetisch tiefste Punkte der Kennlinie, d.h. auf dem Weg zu jedem anderen Punkt wird Energie aufgenommen. $E\geq 0$
  Kandidaten für Relaxpunkte: Knick, Wendestelle (Sinus), Schnittpunkt mit Koordinatenachse
- Energiebilanz: $W_C>0 \Leftrightarrow q$ steigt und $u>0$ oder q fällt und $u<0$ für **L**: q durch Φ und
  $W_C<0 \Leftrightarrow q$ steigt und $u<0$ oder q fällt und $u>0$ $\quad u$ durch i ersetzen

Beispiele für Relaxationspunkte bei C:



wegen Symmetrie

Kein RP; Kennlinie verläuft im II u. IV Quadr. Energie beliebig groß

Ursprung kein RP weil nicht symmetrisch!

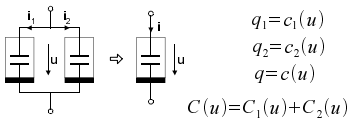
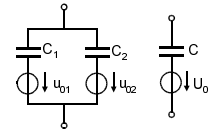
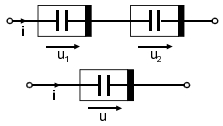
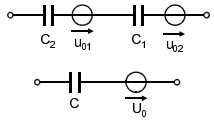
$W_C>0 \Rightarrow$ System nimmt Energie auf $\qquad W_C<0 \Rightarrow$ System gibt Energie ab

Bei **L** dual: $q\Rightarrow\Phi\ ;\ u\Rightarrow i$

Mehrfachkarakter der Netzwerkelemente: $f_R(u,i)=0\ ;\ f_C(u,q)=0\ ;\ f_L(i,\Phi)=0\ ;\ f_M(\Phi,q)=0$

- Nullator, Norator, Leerlauf und Kurzschluss sind Kapazitiv, induktiv, resistiv und memristiv
- Spannungsquellen sind resistiv und kapazitiv
- Stromquellen sind resistiv und induktiv

Zusammenschaltung reaktiver Eintore:

	nichtlineare Reaktanzen	lineare Reaktanzen
Parallelschaltung Funktionsadition in der $u-q$ - Ebene	 $q_1=c_1(u)$ $q_2=c_2(u)$ $q=c(u)$ $C(u)=C_1(u)+C_2(u)$	 $C=C_1+C_2$ $U_0=U_{01}=U_{02}$
Serienschaltung Funktionsadition in der $q-u$ - Ebene	 $C^{-1}(q)=$ $=C_1^{-1}(q+q_{01})+$ $+C_2^{-1}(q+q_{02})$	 $C=C_1\|\|C_2$ $=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ $U_0=U_{01}+U_{02}$

In einem rein kapazitiven oder rein induktiven Netzwerken kann man rechnen wie bei einem resistiven Netzwerk gleicher Struktur, wenn man Kapazitäten wie Leitwerte und Induktivitäten wie Widerstände behandelt.

Bei Induktivitäten dual:

Parallelschaltung:

$L_p=L_1\|\|L_2=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2} \qquad i_0=i_{01}+i_{02}$

Serienschaltung:

$L_s=L_1+L_2 \qquad i_0=i_{01}=i_{02}$

Umwandlung resistiver Beschreibung in reaktive Beschreibungsform

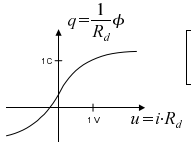
Einige resistive Zweitore können auch durch eine Beschreibung als reaktives Mehrtor angegeben werden

- Bedingungen:
  - implizite resistive Beschreibung $f_R(u,i)=0$ zerfällt in zwei unabhängige Funktionen $f_1(u)=0$ und $f_2(i)=0$
  - eine der zwei Funktionen muß streng linear sein! $f_1(u)=M\,u\overset{!}{=}0$ oder $f_2(i)=N\,i\overset{!}{=}0$
- durch Integration über die Zeit erhält man: $f_1(\phi)=M\,\phi=0$ *bzw.* $f_2(q)=N\,q=0$

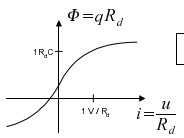
Reaktive Beschreibung $\boxed{f_C(u,q)=\begin{bmatrix} f_1(u)\\ f_2(q)\end{bmatrix}=0}$ bzw. $\boxed{f_L(i,\phi)=\begin{bmatrix} f_1(\phi)\\ f_2(i)\end{bmatrix}=0}$

Dualwandlung zwischen Reaktanzen:

Kapazität und Induktivität sind zueinander duale Klassen von Eintoren.

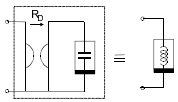


$\boxed{C=\frac{L}{R_d^2}}$



$\boxed{L=C\,R_d^2}$

Umwandlung mit Gyrator:



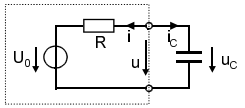
Stetigkeit:

bei C: Die Torspannung $u_C(t)$ ist stetig wenn der Torstrom $i_C(t)$ beschränkt, d.h. $|i_C(t)|<\infty$

Schaltungen ersten Grades

Lineare zeit***in***variante Schaltung:

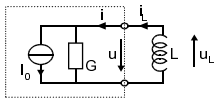
Eintorbeschaltung mit Helmholz / Thévenin (C) bzw. Mayer / Norton (L) :



$i_C = -i$

$i_C = C \cdot \dot{u}_C$

$\boxed{u_C(t_\infty) = U_0}$



$u_L = -u$

$u_L = L \cdot \dot{i}_L$

$\boxed{i_L(t_\infty) = I_0}$

Zeitkonstante $\boxed{\tau = R \cdot C}$ Zeitkonstante $\boxed{\tau = G \cdot L}$

Aus Graph ablesen: - Aus der Steigung des Graphen: $R = \frac{\Delta u}{\Delta i}$ $G = \frac{\Delta i}{\Delta u}$

- Kennlinie verlängern bis zum Schnittpunkt mit der $u-$ bzw. $i-$ Achse $\Rightarrow$ U_0 bzw. I_0

C durch LL ersetzen $\Rightarrow$ $u_C(t_\infty) = u$ L durch KS ersetzen $\Rightarrow$ $i_L(t_\infty) = i$

C durch Spannungsq. $u_C(t_0)$ ersetzen $\Rightarrow$ $u = u(t_0)$ L durch Stromq. $i_L(t_0)$ ersetzen $\Rightarrow i(t_0)$

Strom-, Spannungsverläufe bei konstanter Erregung

Differenzialgl.1. Grades: $\boxed{\dot{u}_C = \frac{-1}{RC} u_C + \frac{1}{RC} u_0}$ $\boxed{\dot{i}_L = \frac{-1}{GL} i_L + \frac{1}{GL} i_0}$

Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(t_\infty) + \left[u_C(t_0) - u_C(t_\infty)\right] exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) \\ i_C(t) &= C\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \left[u_C(t_0) - u_C(t_\infty)\right] exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(t_\infty) + \left[i_L(t_0) - i_L(t_\infty)\right] exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) \\ u_L(t) &= L\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \left[i_L(t_0) - i_L(t_\infty)\right] exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) \end{aligned}}$$

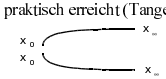
Stromverlauf bei C, Spannungsverlauf bei L SPRINGT ! (ist unstetig)

$\Rightarrow$ Werte an Intervallgrenze extra berechnen! $i_C-(t_1)$, $i_C+(t_1)$, $u_L-(t_1)$, $u_L+(t_1)$

Skizze des Zeitverlaufs:

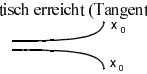
stabiler Fall $\tau > 0$

- Tangente an $x(t)$ in (t_0, x_0) geht durch $(t_0 + \tau, x_\infty)$
- $x(t)$ hat sich nach τ: $0{,}63 \cdot (x_0 - x_\infty)$ in Richtung x_∞ bewegt
- nach $7 \cdot \tau$ ist x_∞ praktisch erreicht (Tangente)
- $x_\infty > x_0$
- $x_\infty < x_0$



instabiler Fall $\tau < 0$

- Tangente an $x(t)$ in (t_0, x_0) geht durch $(t_0 - |\tau|, x_\infty)$
- Nach $|\tau|$ ist $x(t)$ um $1{,}72 \cdot |x_0 - x_\infty|$ angewachsen
- $x(t)$ hat sich nach τ: $0{,}63 \cdot (x_0 - x_\infty)$ in Richtung x_∞ bewegt
- nach $7 \cdot \tau$ ist x_∞ praktisch erreicht (Tangente)
- $x_\infty < x_0$
- $x_\infty > x_0$



$x_\infty = x(t_\infty)$: Gleichgewichtszustand (Fixpunkt) $x_0 = x(t_0)$: Anfangswert

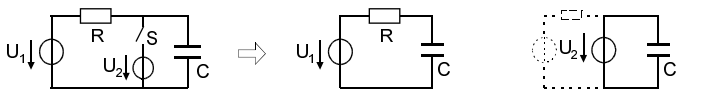
Strom- und Spannungsverläufe bei allgemeiner Erregung ($u_0(t)$ bzw $i_0(t)$ sind beliebige Funktionen der Zeit)

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(t_0)\, exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} u_0(t')\, exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \\ i_L(t) &= i_L(t_0)\, exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} i_0(t')\, exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \end{aligned}}$$

zero input response + zero state response

Lineare Zeitvariante Schaltung

Schalter wird zum Zeitpunkt T geschlossen offener Schalter: geschlossener Schalter:



$t_\epsilon]t_0, T]$ $t_\epsilon]T, \infty]$

$U_C(t_\infty) = U_1$ $U_C(t) = U_2$

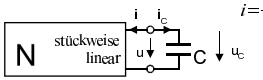
- 2 verschiedene $u(t_\infty)$ und 2 verschiedene τ
- sonst reelle Vorgehensweise wie oben!

Stabilität: passiv $\Rightarrow$ stabil aktiv $\Rightarrow$ instabil (vgl. stückweise lineare Schaltungen)

Stückweise lineare Schaltungen

Dynamischer Pfad

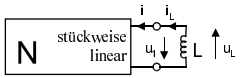
C



$i = -C \cdot \dot{u}$

- Kennlinie von N in u-i-Diagramm einzeichen
- Gleichgewichtspunkte einzeichen: Punkte wo $i = 0$
- Richtung des dynamischen Pfades:
  solange $i > 0$, d.h. i im I. oder II. Quadranten
  $\Rightarrow$ u muß fallen

L



$u = -L \cdot \dot{i}$

- Kennlinie von N in u-i-Diagramm einzeichen
- Gleichgewichtspunkte einzeichen: Punkte wo $u = 0$
- Richtung des dynamischen Pfades:
  solange $u > 0$,d.h u im I. oder IV. Quadranten
  $\Rightarrow$ i muß fallen

Zeitdauer um Kennlinie zu durchlaufen (Stückweise Lineare Schaltung)

- einzelne ESBs zeichnen und Gleichungen aufstellen, τ berechnen
- DGL nach t auflösen:
  $u(t_0)$= Startwert
  $u(t_1)$= Endpunkt des Astes
  $u(t_\infty)$= gedachter Schnittpunkt des Astes mit u - Achse.

$$\boxed{t_1 = t_0 + \tau \cdot \ln \frac{u_C(t_0) - u_C(t_\infty)}{u_C(t_1) - u_C(t_\infty)}}$$

bei L: $$\boxed{t_1 = t_0 + \tau \cdot \ln \frac{i_L(t_0) - i_L(t_\infty)}{i_L(t_1) - i_L(t_\infty)}}$$

- nächster Ast: t_1 für t_0 , neues τ , neue $u(t_0)$, $u(t_1)$, $u(t_\infty)$
- Sprünge:
  - Sprünge kosten keine Zeit
  - bei C : Spannung konstant, Strom springt
  - bei L : Strom konstant, Spannung springt
  - Symmetrie der Kennlinie ausnutzen: $T = 2\, t_2$ $t_1 = t_2$
  - Vorsicht: Zählpfeilrichtung beachten! bei C : $i_C = -i$ bei L : $u_L = -u$
  - Periodendauer (Relaxationsoszilator): $T = t_3 - t_1$ Frequenz: $f = \frac{1}{T}$

Toter Punkt

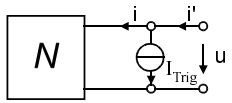
- ist kein Gewichtszustand und es existiert kein Ausweg entlang der Kennlinie
- dynamischer Pfad kann durch Sprungregel fortgesetzt werden:
  - bei C : Punkt auf Kennlinie suchen mit gleicher Spannung
  - bei L : Punkt auf Kennlinie suchen mit gleicher Stromstärke
  - P muß einziger Punkt mit dieser Eigenschaft sein.

  $\Rightarrow$ periodischer Verlauf von Strom und Spannung!

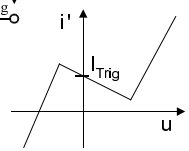
Triggerung

- Durch Triggerimpuls wandert man von einem stabilen zu einem anderen stabilen GGP. Der Triggerimpuls verschiebt die Kennlinie so, daß der Betriebspunkt von einem GGP in den anderen wandern kann.
- i_{Trig} oder u_{Trig} muß groß genug sein, damit Zwischenzustände erreicht werden, es dürfen aber keine neuen Totpunkte entstehen
- Δt muß lang genug sein, damit evtl. Zwischenpunkte durchlaufen werden.

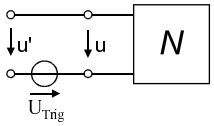
Triggern mit Strom (bei C)



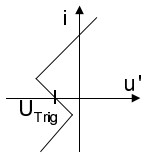
$\boxed{i' = i + I_{Trig}}$



Triggern mit Spannung (bei L)



$\boxed{u' = u - U_{Trig}}$

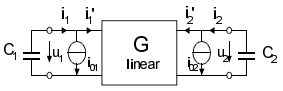


Lineare Schaltungen zweiten Grades

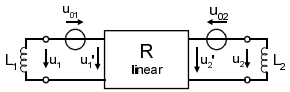
Zustandsgleichungen aufstellen $\boxed{\dot{\underline{x}}=\underline{A}\,\underline{x}+\underline{B}\,\underline{v}}$

1. Schaltung umzeichnen, so daß Reaktanzen an Toren eines resistiven Zweitors liegen.

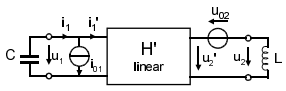
2. ESB`s , je nach Reaktanztyp:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = H' \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}$$

3. Matrixelemente berechnen, in Abhängigkeit von unabhängigen Torgrößen und Erregungsquellen (innen) mit KVL, KCL

I.) $i_1=g_1(u_1,u_2,u_0,i_0)=-C\,\dot{u}_1$
$i_2=g_2(u_1,u_2,u_0,i_0)=-C\,\dot{u}_2$
II.) oder G aufstellen

I.) $u_1=r_1(i_1,i_2,u_0,i_0)=-L\,\dot{i}_1$
$u_2=r_2(i_1,i_2,u_0,i_0)=-L\,\dot{i}_2$
II.) oder R aufstellen

I.) $i_1=h_1(u_1,i_2,u_0,i_0)=-C\,\dot{u}_1$
$u_2=h_2(u_1,i_2,u_0,i_0)=-L\,\dot{i}_2$
II.) oder H' aufstellen

4. Zustandsmatrix $\underline{A}$ ermitteln

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix}\cdot\underline{G}$$

oder aus I)

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix}\cdot\underline{R}$$

oder aus I)

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}\cdot\underline{H'}$$

oder aus I)

5. Einkoppelmatrix $\underline{B}$ bestimmen

$\underline{v}=\begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$ ist Vektor aller inneren Erregungen; $\underline{T}$ ist Transformationsmatrix

Wenn die Erregung gleich null ist handelt es sich um ein autonomes System

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}=\underline{T}\,\underline{v}$$

$$\underline{B}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix}\cdot\underline{T}$$

$$\begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}=\underline{T}\,\underline{v}$$

$$\underline{B}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix}\cdot\underline{T}$$

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}=\underline{T}\,\underline{v}$$

$$\underline{B}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}\cdot\underline{T}$$

6. Zustandsgleichung aufstellen: Zustandsvektor $\underline{x}$:

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

Ausgangssignal: $\boxed{y=\underline{c}^T\underline{x}+\underline{d}\,\underline{v}}=u_{out}$

mit:

$\underline{c}^T$= Auskoppelvektor $\qquad$ $\underline{d}$= Durchgriff der Erregung $\qquad$ $\underline{v}$= Erregungsvektor

EW´s berechnen: $\lambda_{1,2}=\frac{T}{2}\pm\sqrt{\frac{T^2}{4}-\Delta}$ $\qquad T=a_{11}+a_{22}=$ Spur A $\qquad \Delta=\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$\det(A-\lambda E)\overset{!}{=}0 \qquad A=$ Zustandsmatrix = Systemmatrix

man wählt: $\boxed{|\lambda_1|<|\lambda_2|}$
$\Longrightarrow$ q_2 ist schneller EV

EV´s berechnen: $(A-\lambda_1 E)\underline{q}_1\overset{!}{=}0 \qquad (A-\lambda_2 E)\underline{q}_2\overset{!}{=}0$

Zeitkonstante berechnen: $\tau=\frac{-1}{\lambda}$

Lösen der homogenen Zustandsgleichungen ohne Erregung $\boxed{\dot{\underline{x}}(t)=A\,\underline{x}(t)}$ $\qquad v(t)=0$

1. Fall: $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$ $\qquad \boxed{\underline{x}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\underline{q}_1+c_2e^{\lambda_2 t}\underline{q}_2}$ $\qquad c_{1,2}$ mit Anfangsbedingung bestimmen : $x(0)=c_1\underline{q}_1+c_2\underline{q}_2$

2. Fall: $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ $\qquad \underline{x}(t)=e^{\lambda t}\left[E+(A-\lambda E)t\right]\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

3. Fall: $\lambda_1=\overline{\lambda_2}=\lambda\in\mathbb{C}$ $\qquad \underline{x}(t)=c_1Re(e^{\lambda t}\underline{q})+c_2Im(e^{\lambda t}\underline{q})$

($\lambda=\alpha+j\beta$, α= Dämpfung)

$$\boxed{\underline{x}(t)=c_1e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)\underline{q}_r-\sin(\beta t)\underline{q}_i\right]+c_2e^{\alpha t}\left[\sin(\beta t)\underline{q}_r+\cos(\beta t)\underline{q}_r\right]}$$

Lösen der homogenen Zustandsgleichungen durch Transformation auf Normalform

1. Fall: $\lambda_1\neq\lambda_2$

$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, Modalmatrix: $Q=[\underline{q}_1,\underline{q}_2]$ $\qquad \boxed{\underline{\xi}_0=Q^{-1}\underline{x}_0}$ bestimmen

Normalform: $\dot{\underline{\xi}}=\Lambda\underline{\xi} \quad\Rightarrow\quad \underline{\xi}(t)=e^{\Lambda t}\underline{\xi}_0$

Lösung: $\boxed{\underline{\xi}(t)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\xi_{01} \\ e^{\lambda_2 t}\xi_{02} \end{bmatrix}}$ $\qquad$ Rückransformation: $\underline{x}(t)=Q\underline{\xi}(t)$

2. Fall: $\lambda_1=\lambda_2$ Transformation auf Jordan-Normalform

Transformation $\xi_0=Q^{-1}x_0$ kann nicht ausgeführt werden, da Q nicht mehr invertierbar ist.

$J=\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \underline{\xi}_0=Q^{-1}\underline{x}_0 \qquad Q'=\begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{12} \\ \frac{a_{11}-a_{12}}{2} & \frac{a_{11}-a_{12}}{2}-1 \end{bmatrix}$

Lösung: $\boxed{\underline{\xi}(t)=e^{Jt}\underline{\xi}_0=\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{bmatrix}}$ $\qquad$ Rückransformation $x(t)=Q'\xi(t)$

3. Fall: $\lambda_1=\lambda_2^*=\overline{\lambda_2}=(\alpha\pm\beta)\in\mathbb{C}$ Transformation auf reellwertige Normalform

Komplexwertige Normalform: $\Lambda=\begin{bmatrix} \alpha+j\beta & 0 \\ 0 & \alpha-j\beta \end{bmatrix}$

Reelwertige Normalform: $\Lambda'=\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \qquad Q=[q,q^*]$; $Q'=[\underline{q}_r,-\underline{q}_i]$

$\underline{x}=Q\underline{\xi} \Leftrightarrow \underline{x}=Q'\underline{\xi}'$ $\qquad \boxed{\underline{\xi}'=Q'^{-1}Q\underline{\xi}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}\underline{\xi}}$ ausführlich: $\xi_1'=\xi_1+\xi_2=2Re(\xi)$
$\xi_2'=-j(\xi_1-\xi_2)=2Im(\xi)$

Lösen von autonomen Zustandsgleichung durch Zurückführen auf ein hom. System $\boxed{\dot{\underline{x}}(t)=A\,\underline{x}(t)+B\,\underline{v}_0}$ $\qquad v_0=const$

1. Fall: Wenn A invertierbar $\Rightarrow$ Koordinatentransformation: $\underline{x}'=\underline{x}-\underline{x}_\infty$; $\dot{\underline{x}}'=\dot{\underline{x}}$; $\underline{x}_\infty=-A^{-1}B\,\underline{v}_0$

$\Rightarrow$ homogene DGL: $\boxed{\dot{\underline{x}}'=A\,\underline{x}'}$ $\qquad \Rightarrow$ obiger Lösungsansatz

2. Fall: $\boxed{\underline{x}=\underline{x}(hom)+\underline{x}(t_\infty)}$

entspricht einer Verschiebung des Ursprungs in $\underline{x}(t_\infty)$!

$\underline{x}(t_\infty)=-A^{-1}B\,\underline{v}_0$ ist stationärer Endwert im stabilen Fall

$\underline{x}(hom)$ ist homogene Lösung

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}$

Zustandsgleichung mit allgemeiner (zeitabhängiger) Erregung

a) allgemeine Form: $\dot{\underline{x}}(t)=A\,\underline{x}(t)+B\,\underline{v}(t)$

b) Transformation: $\boxed{\dot{\underline{\xi}}=\Lambda\underline{\xi}+Q^{-1}B\,\underline{v}=\Lambda\underline{\xi}+\underline{v'}}$ wobei $\xi=Q^{-1}x \quad \Lambda=Q^{-1}AQ \quad v'=Q^{-1}Bv \quad Q=[q_1|q_2]$

c) Lösung: $\boxed{\underline{\xi}(t)=e^{\Lambda t}\underline{\xi_0}+\int_0^t e^{\Lambda(t-t')}\underline{v'}(t')\,dt'}$

zero input response + zero state response

Ausführlich:

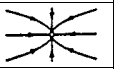
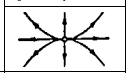
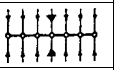
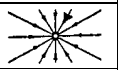
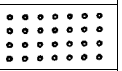
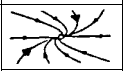
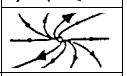
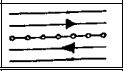
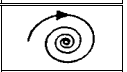
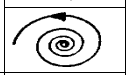
$$\xi_1(t)=e^{\lambda_1 t}\xi_{01}+\int_0^t e^{\lambda_1(t-t')}v_1'(t')\,dt'$$

$$\xi_2(t)=e^{\lambda_2 t}\xi_{02}+\int_0^t e^{\lambda_2(t-t')}v_2'(t')\,dt'$$

d) Rücktransformation des Lösungsvektors $\underline{\xi}$ in unsprünglichen Vekror $\underline{x}$: $\boxed{\underline{x}=Q\underline{\xi}}$

Ein System ist stabil, wenn gilt:
$Re(\lambda_i)<0$ da dann gilt: $\lim_{t\to\infty} x(t)=\underline{0}$
Im Komplexen ist die Richtung von $\underline{q_i}$ nach $-\underline{q_i}$ in der (ξ_1',ξ_2') Ebene immer im Gegenurzeigersinn

Lösungsbahnen des DGL - Systems $\dot{x}=A\,x$ im $\mathbb{R}^2$

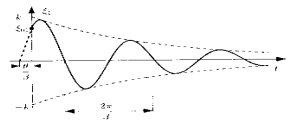
	Matrix A	Eigenwerte	Art von $x=0$	Bezeichnung	Bahnen
1	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	$\lambda_1<0<\lambda_2$	instabil	Sattelpunkt	
2	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	$\lambda_1<\lambda_2<0$	asymtotisch stabil	Knoten 2. Art	
3		$0<\lambda_1<\lambda_2$	instabil		
4	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	$\lambda_2<0$	stabil	Gerade von Ruhelagen	
5		$\lambda_2>0$	instabil		
6	$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$	$\lambda<0$	asymtotisch stabil	Knoten 1. Art	
7		$\lambda>0$	instabil		
8	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\lambda=0$	stabil	Ebene von Ruhelagen	
9	$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$	$\lambda<0$	asymtotisch stabil	Knoten 3. Art	
10		$\lambda>0$	instabil		
11	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\lambda=0$	instabil	Gerade von Ruhelagen	
12	$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$	$\alpha<0$, $\beta\neq 0$	asymtotisch stabil	Strudelpunkt	
13		$\alpha>0$, $\beta\neq 0$	instabil		
14	$\begin{pmatrix}0 & -\beta\\ \beta & 0\end{pmatrix}$	$\alpha=0$, $\beta\neq 0$	stabil	Wirbelpkt. Zentrum	

Zeitantwort:

zu 1. schwach gedämpfte Schwingung

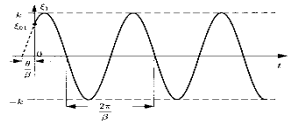
Zeitverlauf $\xi_1(t)=ke^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta) \quad (\alpha<0)$

Kreisfrequenz $\beta=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$



zu 3. ungedämpfte Schwingung

$\xi_1(t)=k\cdot\cos(\beta t+\theta) \quad \beta^2=\omega_0^2$

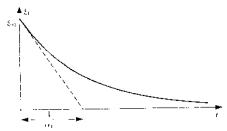


zu 5. stark gedämpfte Schwingung

$\xi_1(t)=\xi_{01}e^{\alpha t} \quad (\alpha<0)$

$\tau_1=-\frac{1}{\lambda_1}$

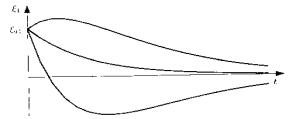
$\tau_2=-\frac{1}{\lambda_2}$



zu 9. aperiodisch gedämpfte Schwingung

$\xi_1(t)=(\xi_{01}+\xi_{02}t)e^{\alpha t} \quad (\alpha<0)$

abhängig von ξ_{02}



Nichtlineare dynamische Schaltungen

- Zustandsgleichungen aufstellen

Zustandsvariable auswählen:

bei C : spannungsgest. $\Rightarrow u_C$!
Ladungsgest. $\Rightarrow q$
beides $\Rightarrow u_C$
bei L : stromgesteuert $\Rightarrow i_L$!
flußgesteuert $\Rightarrow \Phi$
beides $\Rightarrow i_L$

Wenn die Reaktanzen von keiner Größe gesteuert werden, gibt es keine Beschreibung!!

möglichst immer spannungs. - bzw. stromgesteuert (u_C, i_L)

allgemeine Form: $\boxed{\begin{matrix}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}i_C=\cdots=C\,\dot{u}_C\\ u_L=\cdots=L\,\dot{i}_L\end{matrix}}$ $\dot{\underline{x}}=f(\underline{x})$

- Gleichgewichtspunkte $x_1(t_\infty), x_2(t_\infty)$ bestimmen
  - durch Zustandsgleichungen $\boxed{\dot{x}_1=\dot{x}_2=0}$ Nullsetzen und nach x_1 und x_2 auflösen
  - direkt aus Schaltung bestimmen: $C \Rightarrow LL$, $L \Rightarrow KS$ (nur sinnfoll wenn Zustandsbeschreibung nicht gebraucht wird)

- Zustandsgleichungen normieren (falls Norm gegeben!)

$\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}$ mitsubstitiuieren

- Gleichgewichtspunkte klassifizieren
  - Jakobimatrix durch Ableiten der Zusatandsgleichungen aufstellen: $J=\begin{bmatrix}\frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2}\\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2}\end{bmatrix}\Bigg|_{GGP,\ x=x(t_\infty)}$
  - Gleichgewichtspunkte einzeln in J einsetzen und jeweils Eigenwerte berechnen $det(J-\lambda E)=0$
  - Aus den Eigenwerten folgen die Arten der Phasenprotraits
  - bei stückweise linearen Kennlinien braucht man J nicht aufzustellen, sondern man unterteilt jeweils in einzelne lineare Systeme
  - Satz von Hartmann: Wenn in einem Gleichgewichtspunkt p der Realteil aller EW`s der Jacobi-Matrix J undleich Null ist, dann verhält sich das System in der Umgebung von p genauso wie ein lineares System mit denselben Eigenwerten (derselben Systemmatix)
  - Ist der Realteil auch nur eines einzigen Eigenwerts gleich Null $(\alpha=0)$ kann man keine Aussage über das Stabilitätsverhalten machen. (Außname; Stüchw. Lineare Systeme)
  - Bei Stückweise linearen Systemen:
    - Jeden Bereich für sich betrachten und lineare Bereichsdifferentialgleichungen angeben.
    - Keine Differentiation, Kein Satz von Hartmann nötig!

- Phasenportrait zeichen
  - Gleichgewichtspunkte einzeichen und beschriften (Schnittpunkte von $m=0; m=\infty$)
  - Eigenvektoren einzeichen (vor allem bei Sattelpunkt und Knoten, bei Strudelpunkt nicht so wichtig)
  - Lokale Phasenportraits in der Nähe der Gleichgewichtspunkte einzeichen
  - Isoklinen einzeichen: $f_2(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow m=0$
    $f_1(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow m\to\infty$

    m ist Steigung der Tangente an die Trajektorie im Schnittpunkt der Trajektorie mit der Isokline
  - Trajektorien einzeichnen
  - Separatrix ist / sind Verlängerung der EV der instabilen Gleichgewichtspunkte (auch gekrümmt)
  - Wenn alle Bauelemente der Schaltung ungepolt sind, ist das Phasenportrait punktsymmetrisch zum Ursprung.

Konservative Schaltungen (hinreichend genaue Modelle realer Schaltungen sind niemals konservativ!)

Bedingung: für konservative Schaltungen existiert stetige Energiefunktion $E(x)$

- $\dot{E}=0$, $\boxed{\frac{\partial E}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} f_2 = 0}$
- Nur Sattel- und Wirbelpunkte sind als Arten von Gelichgewichtspunkten möglich
- Trajektorien sind Äquipotentiallinien der Energiefunktion $\Gamma =$ Trajektorie

$E(\Gamma)=E(u_C(0), i_L(0))$ $\boxed{E(\Gamma)=\frac{1}{2}(C u_C^2 + L i_L^2)}$ in einem Schwingkreis gespeicherte Feldenergie E

- Scheitelwerte $\hat{u}_c, \hat{i}_L$ erhält man durch Nullsetzen ser jeweils anderen Zustandsgröße $\hat{i}_L=\sqrt{\frac{2E(\Gamma)}{L}}$ $\hat{u}_C=\sqrt{\frac{2E(\Gamma)}{C}}$
- Zeitdauer eines Umlaufs um eine Trajektorie $\boxed{T_0=T(\Gamma)=\oint_\Gamma dt = 4\int_0^{\hat{i}_L} \frac{L}{u_C} di_L = 2\pi\sqrt{LC}}$
- Kreisfrequenz $\boxed{\omega_0=2\pi f_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$; $u_C=\hat{u}_C \cos(\omega_0 t - \Phi_0)$; $i_L=\hat{i}_L \sin(\omega t - \Phi_0)$

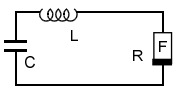
Ergänzung zum Statz von Hartmann:
Ein Gleichgewichtspunkt p einer nichtlinearen dynamischen Schaltung
ist genau dann ein Wirbelpunkt, wenn seine Jacobimatrix rein imaginäre EW`s $(\alpha=0)$ hat
und das System in einer offenen Umgebung U von p konservativ ist.

Oszilatoren

- Phasenpotrait ist stabiler Grenzzyklus (und damit ein Oszilator) $\Leftrightarrow$
  - Es darf nur einen Gleichgewichtspunkt q geben. Dieser muß instabil sein.
  - autonomes, dynamisches System zweiten Grades
  - Trajektorien müssen zu allen Anfangswerten aus Umgebung U beschränkt sein
    (bei letztendlich passiven Elementen immer der Fall !)
  - Zustandsgrößen sind beschränkt (Die Zustandsgrößen sind beschränkt wenn die Schaltung nur aus positiven, linearen Kapazitäten und Induktivitäten sowie resistiven Elementen besteht)

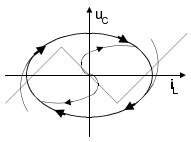
Stabilitätsuntersuchung:
EWs betrachten:
Re < 0 $\Rightarrow$ GGP stabil
Re > 0 $\Rightarrow$ GGP instabil
Re = 0 $\Rightarrow$ keine Aussage

- Stückweise lineare Oszilatoren:



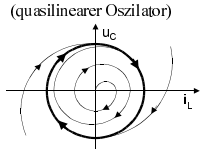
$\dot{u}_C=-\frac{1}{C} i_L$

$\dot{i}_L=-\frac{1}{L} u_C - \frac{1}{L} \cdot r_F(i_L)$



typisches reelles Phasenportrait: (stückweise linearer Oszi.)

fast harmonischer Oszilator
(quasilinearer Oszilator)

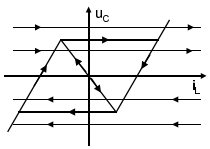


Frequenz abhängig von den Werten der Reaktanzen.
Amplitude abhängig von Nichtlinearität der Bauteile.
$(L\to\infty, C\to\infty, R\to 0)$

Resonanzfrequenz $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Das Widerstandsniveau des Schwingkreises ist sehr hoch gegenüber dem des resistiven Elements: $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{\frac{L}{C}} \gg R$

Relaxationsoszilator



trapezförmig

Frequenz und Amplitude werden wesentlich von Nichtlinearität der Bauteile bestimmt.
$(L\to 0, R\to\infty)$

$\omega_0=\frac{\pi}{\ln 3}\cdot\frac{1}{RC}$

$2\sqrt{\frac{L}{C}} \ll R$

Komplexe Wechselstromrechnung, Analyse dynamischer Schaltungen

Allgemeines:

Eigenschwingung der dynamischen Schaltung: $\boxed{x(t)=Re\{A_m e^{\sigma t} e^{j(\alpha+\omega j)}\}=A_m e^{\sigma t}\cos(\omega t+\alpha)}$

$p=\sigma+j\omega$ $\Leftarrow$ Frequenzparameter p

$\omega=2\pi f$ $\Leftarrow$ Kreisfrequenz ω ; $f=$ technische Frequenz $(f=\frac{1}{T_0})$

$A=A_m e^{j\alpha}$ $\Leftarrow$ Komplexe Amplitude

$\boxed{I_C=j\omega C U_C}$ $\boxed{U_L=j\omega L I_L}$ bzw. $\boxed{I_L=\frac{1}{j\omega L}\cdot U_L}$ $\boxed{U_C=\frac{1}{j\omega C}\cdot I_C}$

Netzwerkfunktionen:

- Zweipolfunktionen: (Zeiger die am gleichen Tor definiert sind (Immitanzen))

$u(t)=Re\{U e^{pt}\}$ $i(t)=Re\{I e^{pt}\}$ mit $p=j\omega$

- Impedanz: komplexer Widerstand, Scheinwiderstand

$\boxed{Z(j\omega)=\frac{U}{I}}$ $\boxed{Z_L(p)=pL}$ $\boxed{Z_C(p)=\frac{1}{pC}}$

- Attmitanz: komplexer Leitwert, Scheinleitwert

$\boxed{Y(j\omega)=\frac{I}{U}}$ $\boxed{Y_L(p)=\frac{1}{pL}}$ $\boxed{Y_C(p)=pC}$

- Transferfunktion: (Übertragungsfunktion, Zeigergrößen gehören zu verschiedenen Toren)

$\boxed{I_q=Y_k(p)U_k}$ $\Rightarrow$ $\boxed{H(j\omega)=\frac{U_{Km}}{I_n}=\frac{(-1)^{n+m}\det Y_{nm}(j\omega)}{\det Y_K(j\omega)}}$

$\det Y_{nm}(j\omega)$ ist die Unterdeterminate von Y_K die nach streichen der n-ten Zeile und m-ten Spalte von Y_k entsteht

Cramer Regel: $u_{Ki}=\frac{\det Y_{Ki}}{\det Y_K}$

$\det Y_{Ki}$ entsteht durch ersetzen der i. Spalte in Y_K durch i_q

Eigenfrequenz bestimmen:

- Transferfunktion faktorisieren (wichtig für Bode)
  - Transferfunktion normieren
  - Nullstellen des Zählerpolynoms $\Rightarrow$ Nullstellen von $H(p)$
  - Nullstellen des Nennerpolynoms $\Rightarrow$ Postellen von $H(p)$
    Eigenfrequenzen $p=\sigma+j\omega$
- Aussage über Phasenportrait:
  Wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms in der linken p Halbebene liegen ist das System stabil

Frequenzgang: (Frequenzabhängigkeit von Berag und Winkel (Real und Imaginärteil) der Komplexwertigen Funktionen)

$\boxed{v(\omega)=20\,lg\left|\frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)}\right| \; in \; dB}$ $v(\omega)=\ln\left|\frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)}\right| \; in \; Np$

$1\,Np=\frac{20\,dB}{\ln 10}\approx 8{,}69\,dB$

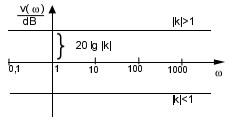
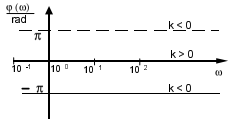
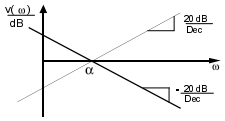
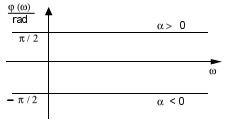
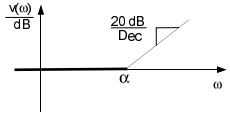
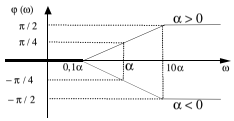
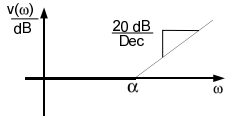
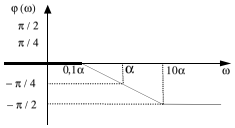
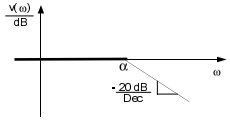
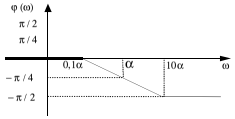
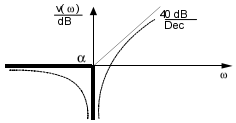
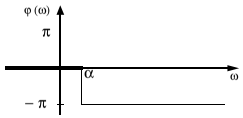
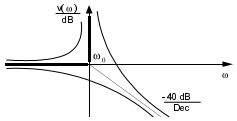
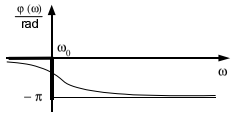
$1\,dB\approx 0{,}115\,Np$

$$\boxed{\varphi(\omega)=\sphericalangle H(j\omega)=\begin{cases}\arctan\frac{Im\{H(j\omega)\}}{Re\{H(j\omega)\}} & für\; Re\{H(j\omega)\}\geq 0\\ \arctan\frac{Im\{H(j\omega)\}}{Re\{H(j\omega)\}}+\pi & für\; Re\{H(j\omega)\}<0\end{cases}}$$

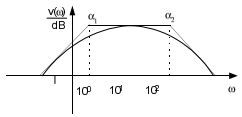
$|H|=\sqrt{H\cdot H^*}$

$lg1=0$ $lg10=1$ $lg1/10=-lg10=-1$ $lg100=2$

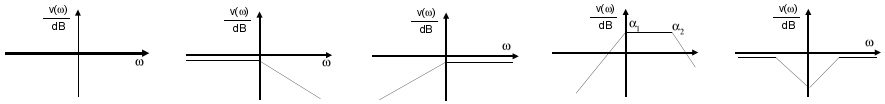
Bode Diagramm

	Betrag $v(\omega)$ logarithmisch auftragen	Phase $\varphi(\omega)$ linear auftragen
$H(j\omega)=k=const$ $\Rightarrow\ v(\omega)=20\,lg\lvert k\rvert$		
$H(j\omega)=\frac{j\omega}{\alpha}$ $\boxed{H(j\omega)=\frac{1}{j\omega/\alpha}}$		
$H(j\omega)=1+\frac{j\omega}{\alpha}$		
$H(j\omega)=1-\frac{j\omega}{\alpha}$		
$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega/\alpha}$		
$H(j\omega)=1+\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)^2$ 40 dB / Dec wegen ..²		
$H(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+j\omega\frac{\omega_0}{Q}+\omega_0^2}$		

- bei 3dB Eckfrequenzen liegt der Kurvenverlauf um 3dB unter den Asymtoten
- Schnittpunkte der Asymtoten sind Eigenfrequenzen α_1, α_2
- Steigung von φ immer zwischen $0\,u\,\alpha \rightarrow 10\,\alpha$



Typische Übertragungsfunktionen



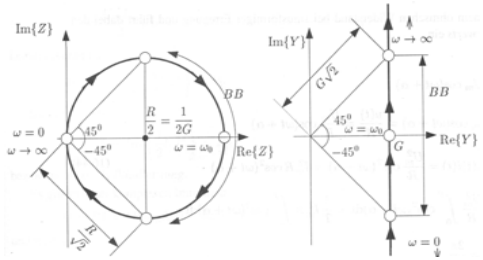
Allpass Tiefpass Hochpass Bandpass Bandsperre

Ortskurven

- es gibt nur positive Frequenzen; man berechnet $Z(j\omega)$ für $\omega=0$ und $\omega\rightarrow\infty$

BB = Bandbreite

A, B ; 3dB Eckfrequenzen



Aufstellen von Ortskruven:

- wichtige Frequenzen berechnen: $\omega=0$; $\omega\rightarrow\infty$; $\omega=\omega_0$; $\lvert Re\{\xi\}\rvert=\lvert Im\{\xi\}\rvert$
- Durchlaufsinn überlegen für $Z=R+j\omega L$ ↑
  für $Z=R+\frac{1}{j\omega L}$ ↓ Die Orientierung ist die Richtung absteigender Frequenz.
- Komplexer Widerstand Z ist: - in Widerstandsebene : Gerade
  - in Leitwertsebene : Kreis
- Komplexer Leitwert Y ist : - in Widerstandsebene : Kreis
  - in Leitwertsebene : Gerade

Komplexe Leistung:

$$P=\frac{1}{2}U\,I^*=P_W+jP_B \qquad P_W=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,dt=Re\{P\}$$

$P=$ komplexe Leistung
$P_W=$ Wirkleistung; Mittelwert der Momentanleistung
$P_B=Im\{P\}=$ Blindleistung
Leistung hängt nicht von der Frequenz ab!

Effektivwerte bei sinusförmiger Spanngung:

$$U_{eff}=\frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad I_{eff}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Mathematik

	0	1/2 π	π	3/2 π	2 π
sin x	0	1	0	- 1	0
cos x	1	0	1	0	1

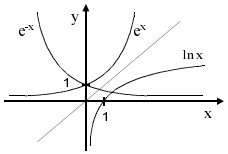
$e=2{,}71828$ Euler'sche Zahl

$e^a\cdot e^b=e^{a+b}$

$\log a\cdot b=\log a+\log b$

$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$

$\log a^k=k\cdot\log a$



Nullstellen: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Komplex: $b^2-4ac<0$ ==>

$x_R=\frac{-b}{2a} \qquad x_i=\pm\frac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$

$(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x}^{\,n-1}}$ $\quad \sin x'=\cos x \quad \cos x'=-\sin x$

$\sinh x'=\cosh x \quad \cosh x'=\sinh x \quad \tan x'=\frac{1}{\cos^2 x}$

T - Glied: $R=\begin{bmatrix}R_1+R_3 & R_3\\ R_3 & R_2+R_3\end{bmatrix}$

Pi – Glied: $G=\begin{bmatrix}G_1+G_2 & -G_2\\ -G_2 & G_2+G_3\end{bmatrix}$

Querwiderstand: $R=\begin{bmatrix}R & R\\ R & R\end{bmatrix}$

Längswiderstand: $G=\begin{bmatrix}G & -G\\ -G & G\end{bmatrix}$